

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗОК НА УСТАЛОСТНУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

С.С. Волков ^{а)}, В.В. Стружанов ^{б)}

*Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620219, Российская Федерация*

а) *Ответственный автор:* volkovss48@yandex.ru, б) stru@imach.uran.ru

АННОТАЦИЯ. Разработаны методы прогнозирования долговечности металлов с учетом влияния случайных нагрузок, действующих при эксплуатации конструкций. Применяются методы теории функций случайных величин. Для оценки случайных нагрузок по экспериментальной гистограмме используются нормальное распределение и распределение Релея. На числовом примере исследовано влияние статистических параметров распределения нагрузки на прогнозируемое число циклов до разрушения.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной особенностью усталостного разрушения материалов является значительный разброс долговечности, то есть числа циклов до разрушения, при работе одинаковых деталей в похожих условиях эксплуатации. Одной из причин этого является случайность нагрузок, действующих на детали механизмов. При действии переменных нагрузок имеет место большое рассеяние как долговечности при данном напряжении, так и разрушающих напряжений при заданной долговечности. Для уточненных расчетов на усталость нужно применять методы теории вероятностей и математической статистики. Такие методы используют накопленный статистический материал в процессе эксплуатации машин и конструкций [1,2,3].

Так, например, нагрузки на элементы конструкций железнодорожных вагонов являются в значительной степени случайными. При движении колесной пары по рельсам нужно учитывать неравномерный износ бандажа колес, изменение вертикальной жесткости пути вдоль рельса, влияние просадки балласта на взаимодействие колеса и рельса. Аналогичные явления можно наблюдать в большинстве проблем, связанных с усталостью. Для разработки вероятностных моделей усталости нужны экспериментальные данные, дающие возможность их статистической обработки. Таким источником числовых данных могут быть осциллограммы усилий в различных элементах, регистрируемые вагоном-лабораторией [4,5]. Изучая осциллограммы, можно получить закон распределения случайной амплитуды нагружения, а затем учесть его влияние на долговечность.

ЛИНИЯ ВЕЛERA КАК ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим влияние случайных напряжений для прогнозирования долговечности материалов при циклическом нагружении. Основной характеристикой выносливости детали является кривая усталости Велера. Уравнение линии усталости [2] запишем в виде

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r}\right)^\alpha = \frac{N_0}{N}, \quad \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (1)$$

Здесь σ_a – амплитуда (напряжение) цикла; σ_r – предел выносливости при коэффициенте асимметрии цикла $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$; N – число циклов до разрушения (долговечность) детали при данной амплитуде цикла; N_0 – число циклов, соответствующее точке перелома кривой Велера в логарифмических координатах. Показатель степени α зависит от свойств материала и условий эксперимента. Величина α изменяется от 3 до 20, и ее значения рекомендуются для расчета каждой конкретной детали в соответствии с инженерным опытом.

На рис. 1 приведена кривая усталости для стали, связывающая напряжение амплитуды цикла σ_a и долговечность N в логарифмических координатах.

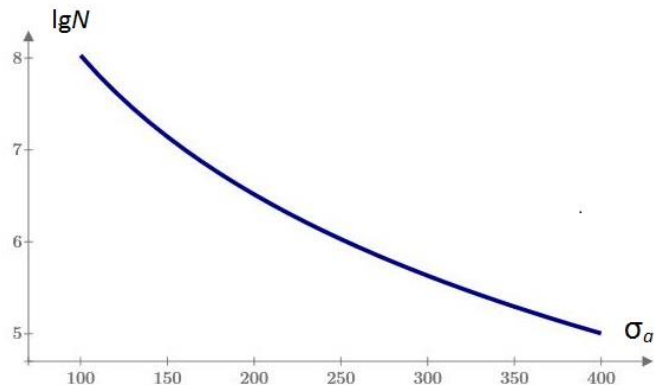


Рис. 1. Линия усталости Велера

Параметры, влияющие на расчет долговечности, являются случайными величинами и имеют большой разброс. Долговечность можно рассматривать как функцию случайных величин.

Перейдем в (1) к логарифмическим координатам для записи долговечности. Рассмотрим логарифм долговечности $\lg N = Y$ как функцию случайной амплитуды $\sigma = X$. Значения случайных величин X и Y обозначим соответственно x и y . Тогда, преобразуя формулу (1), получим

$$y = \varphi(x) = \lg N_0 + \alpha \lg \sigma_r - \alpha \lg x. \quad (2)$$

Запишем обратную функцию $x = \psi(y)$ и вычислим ее производную $\psi'(y)$.

$$x = \psi(y) = \sigma_r \cdot \exp\left(\frac{-y + \lg N_0}{\alpha \lg e}\right), \quad x' = \psi'(y) = -\frac{\sigma_r}{\alpha \lg e} \exp\left(\frac{-y + \lg N_0}{\alpha \lg e}\right). \quad (3)$$

В результате найдем плотность $g(y)$ и функцию распределения $G(y)$ логарифма случайной долговечности Y через плотность $f(x)$ и функцию распределения $F(x)$ случайного напряжения X .

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|, \quad G(y) = F(\psi(y)). \quad (4)$$

Вероятность попадания случайной долговечности N в диапазон (N_1, N_2) вычислим с помощью функции распределения $G(y)$:

$$P(N_1 \leq N \leq N_2) = G(\lg N_2) - G(\lg N_1). \quad (5)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ

При выборе плотности распределения вероятностей случайной амплитуды нагружения используются соответствующие экспериментальные гистограммы. Соответствие закона распределения и гистограммы проверяется по статистическим критериям согласия. По данным эксперимента определим математическое ожидание m и среднее квадратичное отклонение s случайной амплитуды.

Пусть для характеристики амплитуды выбрано нормальное распределение с параметрами m и s . Обозначим его плотность $f(x)$, а для записи функции нормального распределения применим интеграл Лапласа $\Phi(x)$. Используя формулы (2-4), вычислим плотность распределения $g(y)$ и функцию распределения $G(y)$ логарифма случайной долговечности N .

$$g(y) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\psi(y)-m)^2}{2s^2}\right) |\psi'(y)|, \quad G(y) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\psi(y)-m}{s}\right). \quad (6)$$

В качестве второго варианта характеристики случайных напряжений рассмотрим распределение Релея. Это распределение зависит от параметров x_0 , a . Для распределения Релея математическое ожидание m , среднее квадратичное отклонение s и параметры x_0 , a связаны формулами [1]

$$m = x_0 + a\sqrt{0.5\pi} = x_0 + 1,253 a; \quad s = 0,655 a. \quad (7)$$

Используя формулы (2-4), вычислим плотность распределения $\tilde{g}(y)$ и функцию распределения $\tilde{G}(y)$ логарифма случайной долговечности N , если напряжения имеют распределения Релея.

$$\tilde{g}(y) = \frac{\psi(y) - x_0}{a^2} \exp\left(-\frac{(\psi(y) - x_0)^2}{2a^2}\right) |\psi'(y)|, \quad \tilde{G}(y) = 1 - \exp\left(-\frac{(\psi(y) - x_0)^2}{2a^2}\right). \quad (8)$$

Формулы (5,6,8) применяются для прогнозирования усталостной долговечности с учетом случайного распределения случайных напряжений цикла.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СЛУЧАЙНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Рассмотрим числовой пример. Пусть известны параметры уравнения (1): $\lg N_0 = 8$, $\sigma_r = 110$, $\alpha = 5,3$. Уравнения линии Велера (2) и обратной функции (3) будут следующими:

$$y = \varphi(x) = 8 + 5,3 (\lg 110 - \lg x). \quad (9)$$

$$x = \psi(y) = 110 \cdot \exp\left(\frac{8-y}{2,3}\right), \quad |\psi'(y)| = 47,8 \cdot \exp\left(\frac{8-y}{2,3}\right). \quad (10)$$

Проведена статистической обработка экспериментальных данных о случайных напряжениях σ_a . Диапазон их изменения составляет от 100 МПа до 400 МПа. Получены относительные частоты распределения нагрузок на интервалах 100–130, 130–160, 160–190, 190–220, 220–250, 250–280, 280–310, 310–340, 340–370, 370–400. Данные о распределении частот приведены в таблице 1.

Таблица 1

Эмпирическое распределение частот напряжений

Левые концы интервалов	00	30	60	90	20	50	80	10	40	70
Относи- тельные частоты	0,112	0,167	0,225	0,194	0,140	0,084	0,033	0,028	0,017	0,008

По таблице 1 рассчитываются параметры распределения: $m = 184,23$ МПа, $s = 58,32$ МПа. Затем строится гистограмма напряжений и рассматривается возможность представления гистограммы в виде плотности некоторого теоретического распределения. Каждый вариант проверим по критерию Пирсона

на уровне значимости 0,05. Число степеней свободы равно 7, так как у нас 10 интервалов и каждое гипотетическое распределение зависит от двух параметров. В этом случае значение критерия Пирсона $\chi^2 = 14,07$.

Проверяя нормальное распределение, получим наблюдаемое значение $\chi = 12,3 < 14,07$. Следовательно, нормальное распределение может быть принято как теоретическое для данной гистограммы.

Параметры распределения Релея вычислим по формулам (7): $a = 89,04$; $x_0 = 72,66$. Проверяя распределение Релея по критерию Пирсона, получим наблюдаемое значение $\chi = 10,1 < 14,07$. Следовательно, распределение Релея также может быть принято как теоретическое для данной гистограммы.

С помощью законов распределения (6,8) вычисляем вероятности изменения логарифма случайной долговечности $\lg N$. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Вероятность долговечности для различных видов распределения нагрузок

Виды теоретических распределений	Интервалы для $\lg N$					
	(5;5.5)	(5.5; 6)	(6; 6.5)	(6.5; 7)	(7; 7.5)	(7.5; 8)
Нормальное распределение	0.001	0.091	0.246	0.283	0.204	0.175
Распределение Релея	0.019	0.090	0.198	0.272	0.239	0.183

На рис. 2 показаны результаты расчетов для варианта распределения вероятностей Релея (7,8). Разница значений горизонтальных маркеров на рис. 2(b) показывает вероятности попадания логарифма долговечности в интервалы, соответствующие таблице 2.

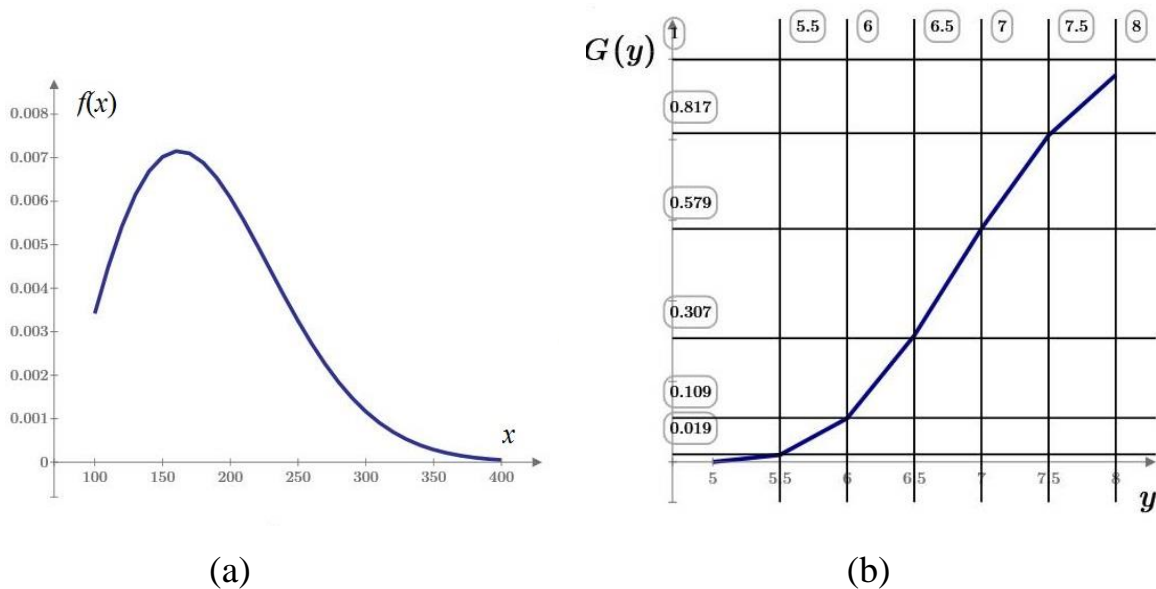


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей Релея случайного напряжения (а) и соответствующая функция распределения логарифма случайной долговечности (б).

Таким образом, применение методов теории функций случайных величин при изучении кривых усталости дает возможность прогнозировать долговечность элементов конструкций. Приведенные результаты показывают существенное влияние вида распределения на оценку вероятности усталостной долговечности. Следовательно, прогнозирование долговечности в ответственных случаях должно опираться на большой массив статистических данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана вероятностная математическая модель оценки долговечности. Это дает возможность отразить реальные процессы усталостного разрушения материалов с учетом случайных условий нагружения. Учитывается влияние случайной амплитуды цикла и вида ее распределения на законы распределения случайной долговечности. Это дает возможность уточнить существующие методы

прогнозирования усталостной долговечности. На числовых примерах показано влияние статистических параметров распределения нагрузки на прогнозируемое число циклов до разрушения. Для более точного выбора теоретического распределения желательно учитывать также моментные функции более высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Collins, Failure of Materials in Mechanical Design, John Wiley & Sons, New York, 1981.
2. Серенсен С.В. Сопротивление материалов усталостному и хрупкому разрушению. М.: Атомиздат, 1975. 192 с.
3. Zakharova T.N. Statistical Nature of Fatigue // Structural Strength of Machines and Parts of Turbine Engines / Ed. by I.A. Birger, B.F. Balashov. - Moscow: Mashinostroenie, 1981. - P. 23-29.
4. Котельников А.П. Специальные средства предупреждения техногенных катастроф, вызванных усталостным разрушением металлоконструкций машин, выработавших нормативный срок службы // Транспорт Урала. – 2004. – № 3. – С. 74 – 80.
5. Сабиров Р.Д. Движение колесной пары вагона по неравноупругому пути вдоль рельса // Транспорт Урала. – 2009. – № 4(23). – С. 69 – 72.