КРУПНОМАСШТАБНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю.
Институт машиноведения УрО РАН
ул. Комсомольская, 34, г Екатеринбург, 620049, Россия.
alex55gor@mail.ru

В работе получены аналитические решения стационарного сдвигового конвективного течения вязкой вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Течение жидкости описывается уравнениями Обербека-Буссинеска с учетом двух параметров Кориолиса. Поле скоростей определяется точным решением Экмана. Поле температуры и поле давления линейно зависит от продольных координат. После подстановки в исходные уравнения получена краевая задача для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой получено аналитически. Проведен анализ решений. Показано влияние второго параметра Кориолиса на фоновое давление.

Ключевые слова: точное решение, первый параметр Кориолиса, второй параметр Кориолиса, течение Экмана, противотечение.

Постановка задачи.

Уравнения Обербека-Буссинеска, с учетом $V_z = 0$, примут вид [1]

$$\left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) Gr - V_y \frac{\sin\varphi}{\mathrm{Ek}} = -Gr \frac{\partial P}{\partial x} + \Delta V_x$$

$$\left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) Gr + V_x \frac{\sin\varphi}{\mathrm{Ek}} = -Gr \frac{\partial P}{\partial y} + \Delta V_y$$

$$V_x \frac{\cos\varphi}{\delta\,\mathrm{Ek}} + Gr \frac{\partial P}{\partial z} = GrT \tag{1}$$

$$\left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) Ra = \Delta T\ ,\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Здесь V_x, V_y – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости, $V = g\beta\vartheta L^2/\nu$ – характерный масштаб скорости; безразмерные горизонтальные координаты *x, y* определены характерным масштабом длине L, а поперечная координата z – толщиной h слоя жидкости; $\delta = h/L$ – отношение масштабов длины; $\mathrm{Gr} = g\beta\vartheta L^3/\nu^2$ – число Грасгофа, β – коэффициент объемного расширения жидкости, g – ускорение свободного падения, ϑ - разность максимальной и минимальной температур, ν – коэффициент кинематической (молекулярной) вязкости жидкости, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Gr}$ – число Рэлея, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля, χ – коэффициент температуропроводности, $\mathrm{Ek} = \mathrm{Ro}/\mathrm{Gr} = \nu/(L\omega)$ – число Экмана, $\mathrm{Ro} = VL/(L^2\omega)$ – число Россби. Вектор угловой скорости имеет вид: $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$ [2]..

Для системы (1) зададим следующие граничные условия. На нижней поверхности $z = 0$ заданы: температура в виде

$$T_0 = A_0 + xA_1 + yA_2, \tag{2}$$

где A_0 - значение фоновой температуры (можно принять равным нулю), A_1, A_2 - градиент температуры; условия прилипания: $V_x\big|_{z=0}=0$, $V_y\big|_{z=0}=0$.

На верхней (свободной) поверхности $z=1$ задана температура в виде [3,4]

$$T_a = B_0 + xB_1 + yB_2, \tag{3}$$

где B_0 - значение фоновой температуры, B_1, B_2 - компоненты градиента температуры. На верхней границе давление постоянно. Течение жидкости на свободной границе индуцируется заданием скоростей.

Точное решение будем искать в виде [5,6,7]:

$$V_x = U(z);\; V_y = V(z);\; P = P_0(z) + xP_1 + yP_2(z),\; T = T_0(z) + xT_1 + yT_2(z) \tag{4}$$

После подстановки (4) в систему (1) получим разрешающую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно восьми функций U, V, T_0, T_1, T_2, P_0 P_1, P_2:

$$T_1'' = 0,\; T_2'' = 0,\; P_1' = \frac{\delta^2}{Gr}T_1,\; P_2' = \frac{\delta^2}{Gr}T_2, \tag{5}$$

$$U'' = \delta^2 Gr P_1 - \frac{\delta^2 \sin\varphi}{Ek}V,\; V'' = \delta^2 Gr\, P_2 + \frac{\delta^2 \sin\varphi}{Ek}U, \tag{6}$$

$$T_0'' = \frac{1}{Ra}\left(T_1 U + T_2 V\right),\; P_0' = \frac{\delta\cos\varphi}{Gr\, Ek}U - \frac{\delta^2}{Gr}T_0. \tag{7}$$

Система уравнений (5)-(7) решается последовательно. Уравнения записаны в порядке их решения. Общее решение подсистемы (5) получается последовательным интегрированием входящих в нее уравнений и имеет вид

$$T_1 = C_1 z + C_2,\; T_2 = C_3 z + C_4,$$

$$P_1 = \frac{(1-z)\left(C_1(1+z) + 2C_2\right)\delta^2}{2Gr},\; P_2 = \frac{(1-z)\left(C_3(1+z) + 2C_4\right)\delta^2}{2Gr}. \tag{8}$$

Подсистему (6) можно свести к одному уравнению относительно функции U:

$$\frac{d^4U}{dz^4} + 4\delta^4 k^4 U = \delta^2 \mathrm{Gr}\left(P_1''(z) - 2\delta^2 k^2 P_2(z)\right) \tag{9}$$

Здесь обозначено $2k^2 = \sin\varphi/\mathrm{Ek}$. При этом собственные значения системы (9) равны $\sqrt{2}k\left(\pm 1 \pm i\right)$ и инвариантны при смене знака широты. При отрицательных значениях угла φ (южное полушарие) берется $k = \sqrt{|\sin\varphi|/(2\mathrm{Ek})}$. Но в неоднородные слагаемые решения входит $k^2 = \sin\varphi/(2\mathrm{Ek})$. Эта величина очевидно, зависит от знака широты.

Общее решение подсистемы (6) можно записать в виде:

$$U = \left(C_7 e^{k\delta z} + C_9 e^{-k\delta z}\right)\cos(k\delta z) + \left(C_8 e^{k\delta z} + C_{10} e^{-k\delta z}\right)\sin(k\delta z) - \tag{10}$$

$$- \frac{C_1 + \delta^2 k^2 (1-z)\left(C_3(1+z) - 2C_4\right)}{4k^4},$$

$$V(z) = \frac{-C_3 - k^2 (z-1)\left(C_1 + 2C_2 + C_1 z\right)\delta^2}{4k^4} + \left(C_9 e^{-kz\delta} - C_7 e^{kz\delta}\right)\cos(kz\delta) - \tag{11}$$

$$-(C_{10}e^{-kz\delta}-C_8e^{kz\delta})\sin\left(kz\delta\right).$$

Здесь где $C_1,C_2,C_3,C_4,\ C_5,C_6,C_7,C_8,\ C_9,C_{10}$ - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Краевые условия (2), (3) в рамках класса (4) запишутся следующим образом

при $z=0$: $U=0$, $V=0$, $T_0=0$, $T_1=A_1$, $T_2=A_2$; (12)

при $z=1$: $T_1=B_1$, $T_2=B_2$, $T_0=B_0$, $P_0=0$, $P_1=0$, $P_2=0$, $U=W_x$, $V=W_y$.

При заданных граничных условиях (12) решение скорости и градиентов температуры и давления примут вид

$$T_1=A_1+\left(B_1-A_1\right)z,\ T_2=A_2+\left(B_2-A_2\right)z,$$

$$P_1(z)=\frac{\left(B_1+A_1\left(z-1\right)^2-B_1z^2\right)\delta^2}{2\mathrm{Gr}},\ P_2(z)=\frac{\left(B_2+A_2\left(z-1\right)^2-B_2z^2\right)\delta^2}{2\mathrm{Gr}},$$

$$U\left(z\right)=\frac{A_1-B_1}{4k^4}+\frac{B_2-A_2}{4k^2}z^2\delta^2-\delta^2\frac{A_2+B_2}{4k^2}+\frac{z\ \delta^2}{2k^2}A_2+$$

$$+\frac{1}{1+e^{4k\delta}-2e^{2k\delta}\cos\left(2k\delta\right)}\Big\{W_x\Big[\left(e^{k\delta(1-z)}+e^{k\delta(3+z)}\right)\cos\left(k\delta\left(z-1\right)\right)-$$

$$-\left(e^{k\delta(3-z)}+e^{k\delta(1+z)}\right)\cos\left(k\delta\left(1+z\right)\right)\Big]-$$

$$-W_y\Big[\left(e^{(k(3+z)\delta}-e^{k(1-z)\delta}\right)\sin\left(k\left(z-1\right)\delta\right)+\left(e^{k\delta(3-z)}-e^{k\delta(1+z)}\right)\sin\left(k\delta\left(1+z\right)\right)\Big]+$$

$$+\frac{A_1-B_1}{4k^4}\Big[\left(e^{(2-z)k\delta}+e^{k\delta(2+z)}\right)\cos\left(k\delta\left(z-2\right)\right)-\left(e^{(1-z)k\delta}+e^{k\delta(3+z)}\right)\cos\left(k\delta\left(z-1\right)\right)-$$

$$-\left(e^{(4-z)k\delta}+e^{k\delta z}\right)\cos\left(k\delta z\right)+\left(e^{(3-z)k\delta}+e^{(1+z)k\delta}\right)\cos\left(\left(1+z\right)k\delta\right)\Big]+$$

$$+\frac{A_2-B_2}{4k^4}\Big[\left(e^{(2-z)k\delta}-e^{k\delta(2+z)}\right)\sin\left(k\delta\left(z-2\right)\right)+\left(e^{k\delta(3+z)}-e^{k\delta(1-z)}\right)\sin\left(k\delta\left(z-1\right)\right)$$

$$+\left(e^{kz\delta}-e^{(4-z)k\delta}\right)\sin\left(kz\delta\right)+\left(e^{(3-z)k\delta}-e^{(1+z)k\delta}\right)\sin\left(\left(1+z\right)k\delta\right)\Big]+$$

$$+\frac{A_1+B_1}{4k^2}\ \delta^2\Big[\left(e^{(2-z)k\delta}-e^{(2+z)k\delta}\right)\sin\left(z-2\right)k\delta+\left(e^{k\delta z}-e^{(4-z)k\delta}\right)\sin\left(k\delta z\right)\Big]+$$

$$+\frac{A_2+B_2}{4k^2}\ \delta^2\Big[-\left(e^{(2-z)k\delta}+e^{(2+z)k\delta}\right)\cos\left(\left(z-2\right)k\delta\right)+\left(e^{(4-z)k\delta}+e^{k\delta z}\right)\cos\left(k\delta z\right)\Big]\Big\},$$

$$V(z)=\frac{A_2-B_2}{4k^4}-\frac{\delta^2}{4k^2}\left(B_1\left(z^2-1\right)-A_1\left(z-1\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{1+e^{4k\delta}-2e^{2k\delta}\cos(2k\delta)}\Big\{W_x\Big[\Big(e^{k(3+z)\delta}-e^{k(1-z)\delta}\Big)\sin k(z-1)\delta+$$

$$+\Big(e^{k(3-z)\delta}-e^{k(1+z)\delta}\Big)\sin k(1+z)\delta\Big]+$$

$$+W_y\Big[\Big(e^{k\delta(1-z)}+e^{k\delta(3+z)}\Big)\cos\big(k\delta(z-1)\big)-\Big(e^{k\delta(3-z)}+e^{k\delta(1+z)}\Big)\cos\big(k\delta(z+1)\big)\Big]+$$

$$+\frac{A_1-B_1}{4k^4}\Big[\Big(e^{(2+z)k\delta}-e^{(2-z)k\delta}\Big)\big(\sin(z-2)k\delta\big)+\Big(e^{(1-z)k\delta}-e^{(3+z)k\delta}\Big)\sin\big((z-1)k\delta\big)+$$

$$+\Big(e^{(4-z)k\delta}-e^{k\delta z}\Big)\sin(k\delta z)-\Big(e^{(3-z)k\delta}-e^{(1+z)k\delta}\Big)\sin\big((1+z)k\delta\big)\Big]+$$

$$\frac{A_2-B_2}{4k^4}\Big[\Big(e^{(2-z)k\delta}+e^{(2+z)k\delta}\Big)\cos\big((z-2)k\delta\big)-\Big(e^{(1-z)k\delta}+e^{(3+z)k\delta}\Big)\cos\big((z-1)k\delta\big)-$$

$$-\Big(e^{(4-z)k\delta}+e^{zk\delta}\Big)\cos(zk\delta)+\Big(e^{(3-z)k\delta}+e^{(1+z)k\delta}\Big)\cos\big((1+z)k\delta\big)\Big]+$$

$$+\frac{A_2+B_2}{4k^2}\delta^2\Big[\Big(e^{(2-z)k\delta}-e^{(2+z)k\delta}\Big)\sin\big((z-2)k\delta\big)-\Big(e^{(4-z)k\delta}-e^{k\delta z}\Big)\sin(k\delta z)\Big]+$$

$$+\frac{A_1+B_1}{4k^2}\;\delta^2\Big[\Big(e^{(2-z)k\delta}+e^{(2+z)k\delta}\Big)\cos\big((z-2)k\delta\big)-\Big(e^{(4-z)k\delta}+e^{k\delta z}\Big)\cos(k\delta z)\Big]\Big\}.$$

Полные формулы температуры и давления не приводятся из-за их громоздкости.

При указанных краевых условиях были проведены исследования для определения зависимости решения от параметров и угла наклона пластины к оси вращения.

Исследование точных решений показало, что с ростом угловой скорости вращения увеличивается число застойных точек, что приводит к интенсивной стратификации поля скоростей. При определенных значениях параметров жидкость останавливается, а затем разгоняется из-за вращения и нагрева. Фоновое давление существенно зависит от широты. Определяющим слагаемым становится вклад силы Кориолиса. При $\varphi=\pi/2$ давление определяется только температурой и существенно мало по сравнению с давлением, создаваемым силой Кориолиса.

На приведенных ниже рисунках представлены профили компонент скорости и давления. Из рис. 3, 6 видно, что при $\varphi<\pi/2$ давление определяется силой Кориолиса. Слагаемое, определяемое температурой на несколько порядков меньше и на графике сливается с вертикальной осью. На рисунках 1, 2,3 вычисления проведены при параметрах

$$A_1=0.2, A_2=0, B_1=0.1, B_2=0, W_x=0.2, W_y=-1, \delta=0.01,$$

$$\mathrm{Ra}=7000, \mathrm{Gr}=1000, \mathrm{Ek}=0.00001, B_0=10$$

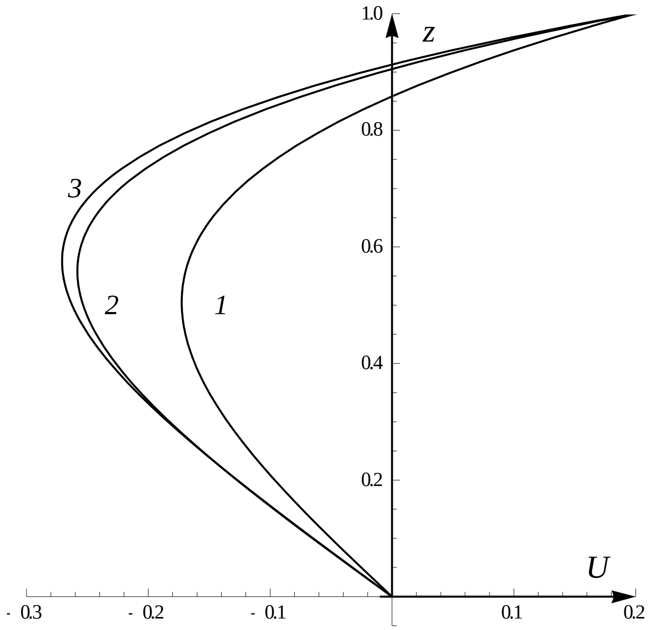

Рис. 1.

профиль компоненты скорости U

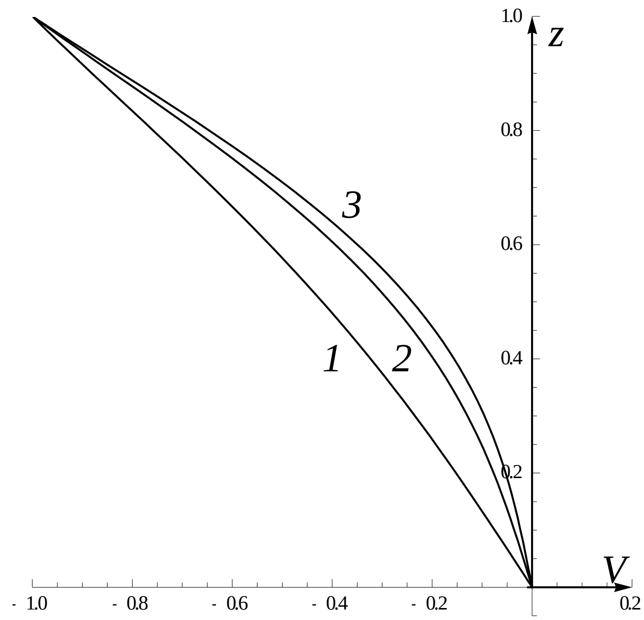

Рис. 2.

профиль компоненты скорости V

цифрами на графиках обозначены кривые, полученные при

1 - $\varphi = \pi/6$, 2 - $\varphi = \pi/3$, 3 - $\varphi = \pi/2$

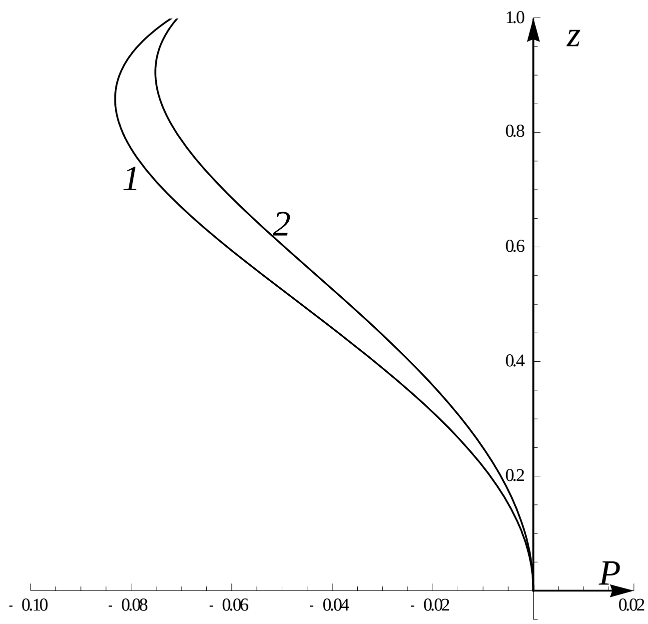

Рис. 3

Профиль давления P_0

На рисунках 4, 5,6 вычисления проведены при параметрах
$A_1 = 0.0, A_2 = 0.1, B_1 = 0.0, B_2 = 2., W_x = 0.2, W_y = -1., \delta = 0.01, \mathrm{Ra} = 700., \mathrm{Gr} = 100, \mathrm{Ek} = 0.000002, B0 = 10$

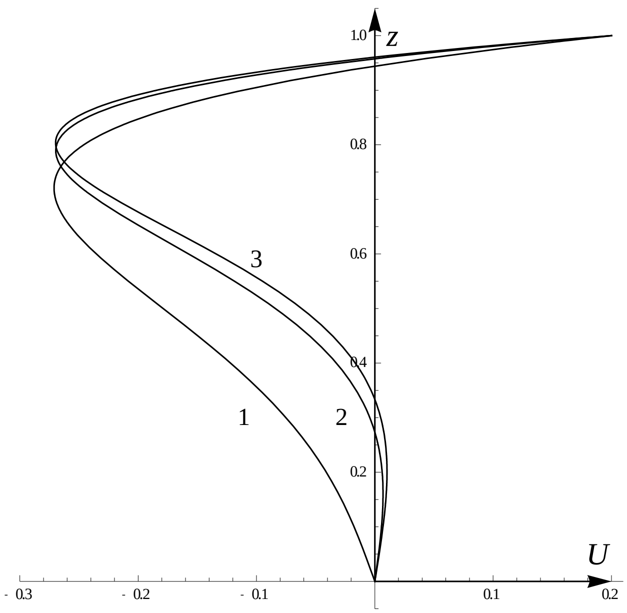

Рис. 4.
профиль компоненты скорости U

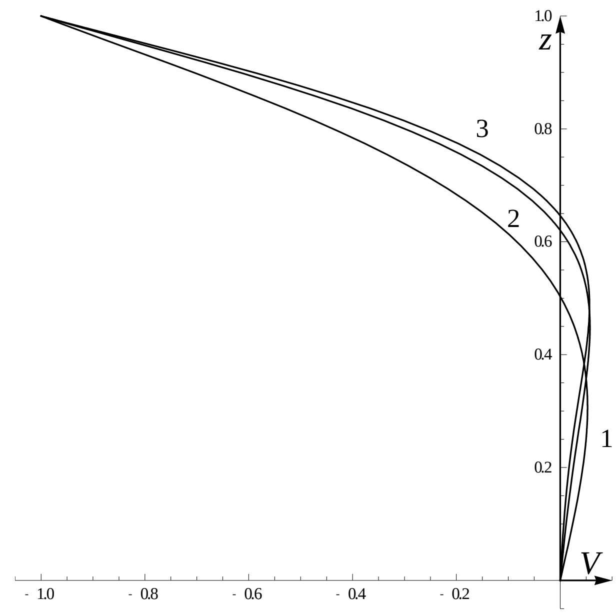

Рис. 5.
профиль компоненты скорости V

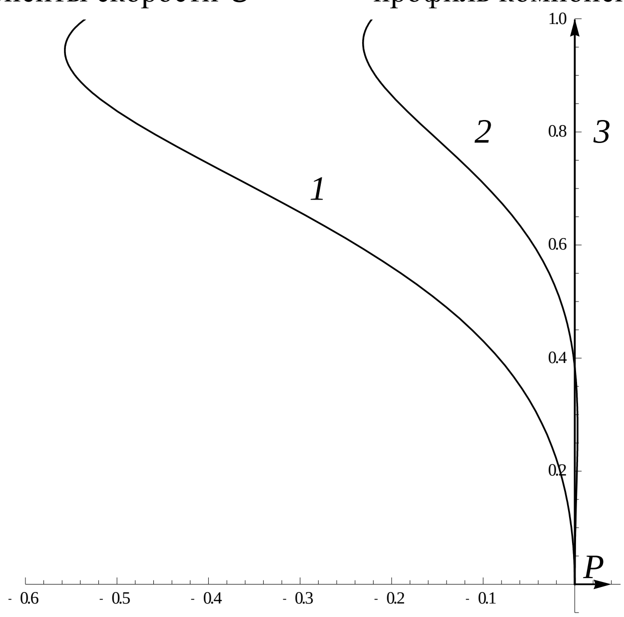

Рис. 6
Профиль давления P_0

При всех использованных значениях параметров температура получалась линейной функцией переменной z. Коэффициенты при нелинейных слагаемых получились на несколько порядков меньше, чем коэффициент линейного слагаемого.

Заключение

В работе получены точные (аналитические) решения задачи конвекции в бесконечно протяженном слое вязкой несжимаемой жидкости на наклонной плоскости с учетом двух параметров Кориолиса. Проведены исследования полученного решения. Показано возникновение противотечений, влияние силы Кориолиса на давление в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т 6. Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 736 с.
2. Н.Ю. Босых, А. П. Чупахин. Об одном частично инвариантном решении уравнений гидродинамики атмосферы//Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 26–35.
3. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости. //ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2018, том 54, № 2, с. 213–220.
4. A.V. Gorshkov, E. Yu. Prosviryakov. Convective flow in the solid rotation of a viscous incompressible fluid //Citation: AIP Conference Proceedings 1915, 040020 (2017); View online: https://doi.org/10.1063/1.5017368. View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1915/1. 4 с.
5. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т.9. № 3. С. 3-9.
6. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Труды института Математики и механики УрО РАН. 2017, Т. 23. № 2. 32-41 с. с. 32-41
7. A.V. Gorshkov, E. Yu. Prosviryakov Complex large-scale convection of a viscous incompressible fluid with heat exchange according to Newton’s law. Citation: AIP Conference Proceedings 1915, 040019 (2017); View online: https://doi.org/10.1063/1.5017367/ View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1915/1 4 с.