ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ В ЗАМКНУТОМ СЛОЕ

Н. В. Бурмашева[1], Е.А. Ларина[2], Е. Ю. Просвиряков[1]
nat_burm@mail.ru, larinakaterina@hotmail.com, evgen_pros@mail.ru

[1]*Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия*
[2]*Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия*

Постановка задачи и методы решения

Рассматривается однонаправленное установившееся конвективное слоистое течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном бесконечном слое толщины h (рис. 1). Действующее на жидкость поле силы тяжести характеризуется ускорением свободного падения $\boldsymbol{g}$, направленного вертикально вниз. Полагаем, что справедливо приближение Обербека-Буссинеска.

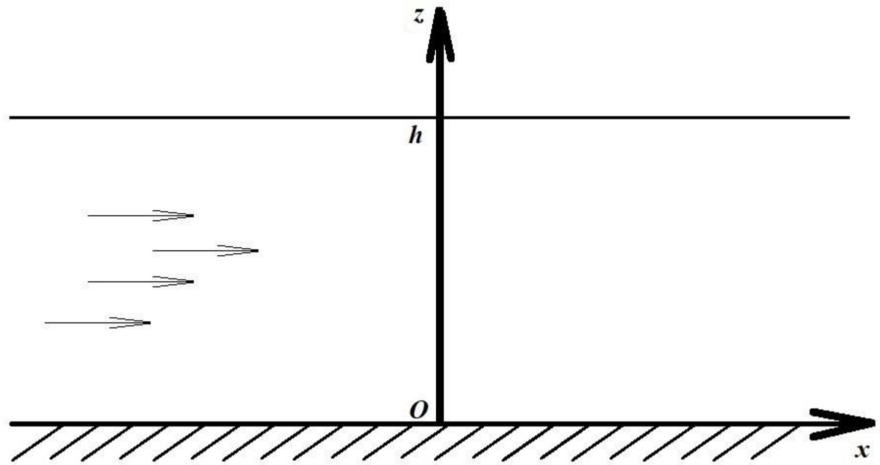

Рис. 1. Геометрия слоя

Полная система уравнений тепловой конвекции, используемая для описания слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости, принимает вид:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T;$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

В системе (1) приняты обозначения: $V_x(x,y,z), V_x = V_y = 0$ – компоненты вектора скорости; $P(x,y,z)$ – нормированное на плотность отклонение давления от гидростатического; $T(x,y,z)$ – отклонение температуры от отсчетного значения ν, χ – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости и ее температуропроводность.

Из системы (1), в частности, следует, что скорость жидкости и давление зависят только от двух координат: $V_x = V_x(y,z)$, $P = P(x,z)$.

Рассмотрим течения вязкой несжимаемой жидкости, профиль скорости которых зависит только от одной (поперечной) координаты:

$$V_x = U(z). \tag{2}$$

Подстановка выражения (2) в систему (1) приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T;$$
$$U\frac{\partial T}{\partial x} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

Использование семейства решений (2) в силу системы (3) позволяет определить структуру решения для гидродинамических полей температуры T и давления P. Несложно убедиться, что поле давления и поле температуры оказываются линейными формами введённых выше координат:

$$T = T_0(z) + T_1(z)x,\ \ P = P_0(z) + P_1(z)x. \tag{4}$$

Подставляя соотношения (2), (4) в систему (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной z (дифференцирование по этой переменной обозначено штрихом):

$$T_1'' = 0;\ P_1' = g\beta T_1;\ \nu U'' = P_1;\ \chi T_0'' = UT_1;\ P_0' = g\beta T_0. \qquad (5)$$

Общее решение системы (5) имеет вид:

$$T_1 = C_1 z + C_2;\ P_1 = \frac{1}{2} g z^2 \beta C_1 + g z \beta C_2 + C_3;$$

$$U = \frac{g z^4 \beta C_1}{24\nu} + \frac{g z^3 \beta C_2}{6\nu} + \frac{z^2 C_3}{2\nu} + z C_4 + C_5;$$

$$T_0 = \frac{1}{7} g z^7 \beta C_1^2 + g z^6 \beta C_1 C_2 + z^5 \left[\frac{6}{5} g \beta C_2^2 + \frac{18}{5} C_1 C_3 \right] + 6 z^4 \left[C_2 C_3 + 2\nu C_1 C_4 \right] +$$

$$+ 24 z^3 \nu \left(C_2 C_4 + C_1 C_5 \right) + 72 z^2 \nu C_2 C_5 + 144 z \nu \chi C_6 + C_7;$$

$$P_0 = \frac{g^2 z^8 \beta^2 C_1^2}{8064\nu\chi} + \frac{g^2 z^7 \beta^2 C_1 C_2}{1008\nu\chi} + \frac{g z^6 \beta \left[g \beta C_2^2 + 3 C_1 C_3 \right]}{720\nu\chi} + \frac{g z^5 \beta \left[C_2 C_3 + 2\nu C_1 C_4 \right]}{120\nu\chi} +$$

$$+ \frac{g z^4 \beta \left(C_2 C_4 + C_1 C_5 \right)}{24\chi} + \frac{g z^3 \beta C_2 C_5}{6\chi} + \frac{1}{2} g z^2 \beta C_6 + g z \beta C_7 + C_8. \qquad (6)$$

Температура на нижней границе $z = 0$ равна отсчётному нулевому значению. Также на нижней границе задано условие проскальзывания Навье. С учетом структуры выбранного обобщенного класса решений (2), (4) эти условия записываются в следующем виде:

$$T_0\big|_{z=0} = 0;\ \alpha \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=0} = U(0). \qquad (7)$$

Здесь α – длина проскальзывания.

На верхней (свободной) поверхности $z = h$ заданы распределения значений полей температуры и давления. Также на верхней границе слоя жидкости задано нулевое касательное напряжение. С учетом структуры класса решений (2), (4) эти условия принимают вид:

$$T_0\big|_{z=h} = \vartheta;\ T_1\big|_{z=h} = A;\ P_0(h) = S_0;\ P_1(h) = S_1;\ \frac{dU}{dz}\bigg|_{z=h} = 0. \qquad (8)$$

Кроме того, полагаем, что расход жидкости является нулевым:

$$\int_0^h U dz = 0. \qquad (9)$$

Решение краевой задачи (6) – (9) имеет вид:

$$T_1 = \frac{10S_1}{gh^2\left(h+5\alpha\right)}\left(h-z\right)\left(h+3\alpha\right)+\frac{A\beta}{4h\left(h+5\alpha\right)}\left(-11h^2+5h\left(3z-8\alpha\right)+60z\alpha\right);$$

$$P_1 = -\frac{S_1}{h^2\left(h+5\alpha\right)}\left(4h^3+5hz\left(z-6\alpha\right)+15z^2\alpha+10h^2\left(-z+\alpha\right)\right)+$$
$$+\frac{Ag\beta}{8h\left(h+5\alpha\right)}\left(h-z\right)\left(h\left(7h-15z\right)+20\alpha\left(h-3z\right)\right);$$

$$U = \frac{S_1}{12h^2\nu\left(h+5\alpha\right)}\left(-24h^3z^2-5hz^3\left(z-12\alpha\right)+20h^2z^2\left(z-3\alpha\right)-15z^4\alpha+8h^4\left(z+\alpha\right)\right)+$$
$$+\frac{Ag\beta}{96h\nu\left(h+5\alpha\right)}\left(42h^3z^2+5hz^3\left(3z-32\alpha\right)+60z^4\alpha-12h^4\left(z+\alpha\right)+4h^2z^2\left(-11z+30\alpha\right)\right) \quad (10)$$

Отличительной особенностью точного решения (10) является учет неоднородности распределения давления на верхней границе рассматриваемого слоя жидкости.

В случае термоизолированных границ (когда продольный градиент температуры $A = 0$) скорость U описывается выражением:

$$U = \frac{S_1}{12h^2\nu(h+5\alpha)}\left(-24h^3z^2 - 5hz^3(z-12\alpha) + 20h^2z^2(z-3\alpha) - 15z^4\alpha + 8h^4(z+\alpha)\right) =$$
$$= \frac{S_1 h^5}{12h^2\nu(h+5\alpha)}\left[\left(-24Z^2 - 5Z^4 + 20Z^3 + 8Z\right) + \frac{\alpha}{h}\left(60Z^3 - 60Z^2 - 15Z^4 + 8\right)\right]. \qquad (11)$$

Здесь $Z=z/h\epsilon[0,1]$ – безразмерная поперечная координата.

Анализ поведения многочленов, входящих в выражение (11), позволил утверждать, что при любом значении параметра α/h скорость U может иметь одну нулевую точку независимо от значения градиента давления ($S_1 \neq 0$).

Исследование скорости течения в случае прилипания жидкости и граничного условия для проскальзывания жидкости

Перепишем выражение для скорости (10) для конвективного случая:

$$U=\frac{Ag\beta}{96h\nu\left(h+5\alpha\right)}\left\{k\left(-24Z^{2}-5Z^{3}\left(Z-12\frac{\alpha}{h}\right)+20Z^{2}\left(Z-3\frac{\alpha}{h}\right)-15Z^{4}\frac{\alpha}{h}+8\left(Z+\frac{\alpha}{h}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\left(42Z^{2}+5Z^{3}\left(3Z-32\frac{\alpha}{h}\right)+60Z^{4}\frac{\alpha}{h}-12\left(Z+\frac{\alpha}{h}\right)+4Z^{2}\left(-11Z+30\frac{\alpha}{h}\right)\right)\right\}. \qquad (12)$$

Здесь через k обозначено отношение

$$k=\frac{8S_{1}}{Ag\beta h},$$

характеризующее вклад пуазейлевского потока по сравнению с термогравитационным в формирование результирующей скорости течения U.

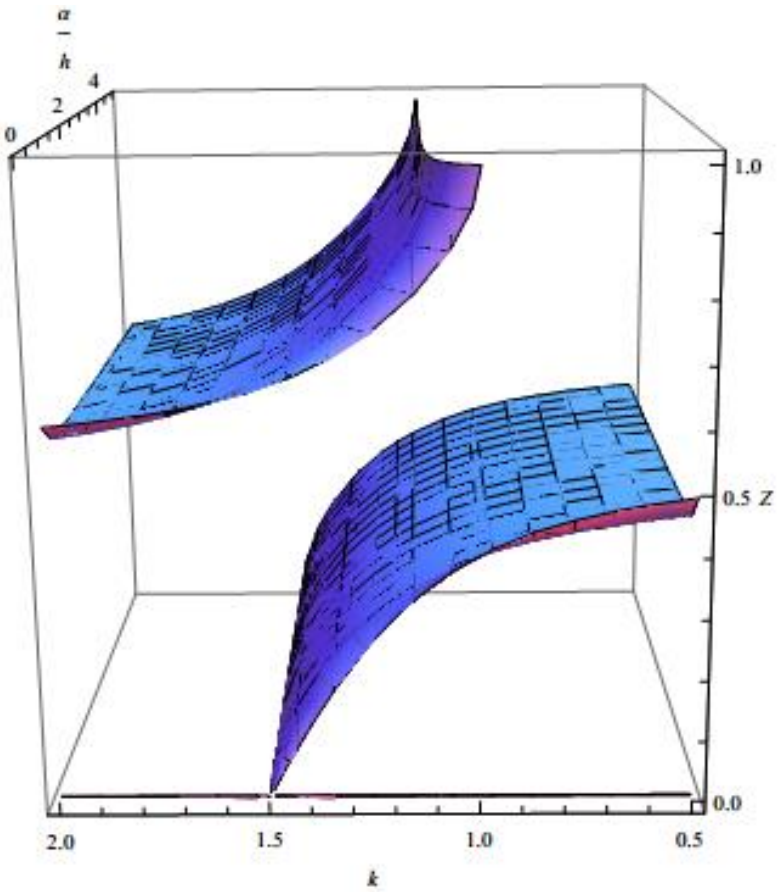

Рис. 2. Множество точек, удовлетворяющих условию $U = 0$

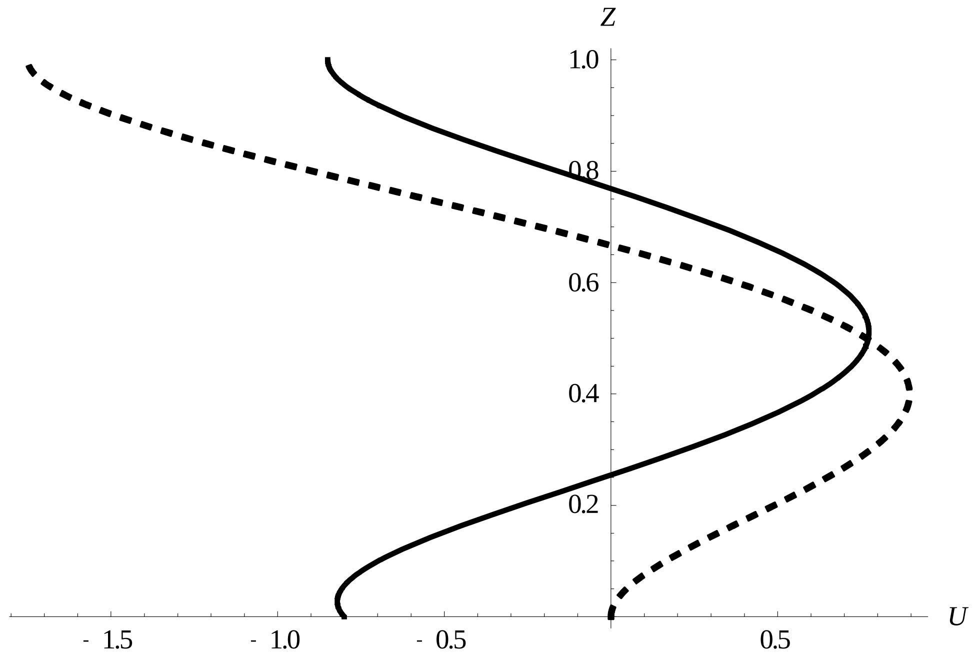

Рис. 3. Профили скорости U ($\alpha/h = 0.5$) при $k = 1.7$ (пунктирная линия) и $k = 1.3$ (сплошная линия)

Исследование скорости течения в случае идеального скольжения жидкости

Решение краевой задачи (6) – (9) для скорости U в случае идеального скольжения имеет вид:

$$U = \frac{S_1 h^2}{60\nu}\left(8 - 60Z^2 + 60Z^3 - 15Z^4\right) + \frac{Ag\beta h^3}{120\nu}\left(-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4\right). \tag{12}$$

Если $S_1 = 0$, то скорость

$$U = \frac{Ag\beta h^3}{120\nu}\left(-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4\right)$$

независимо от величины параметра A обращается в нуль в единственной точке – точке $Z = 0,4445$ (рис. 4).

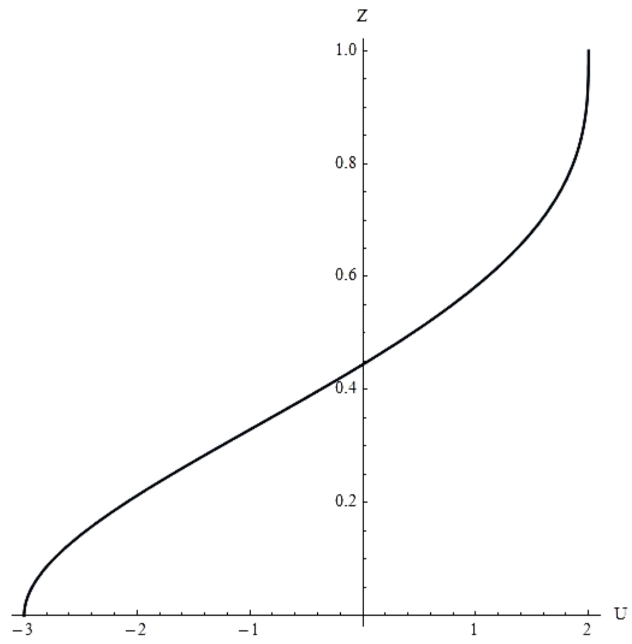

Рис. 4. Профиль скорости U при $S_1 = 0$

В общем случае ($S_1 \neq 0$) перепишем точное решение (12) в следующем виде:

$$U = \frac{S_1 h^2}{60\nu}\left(8 - 60Z^2 + 60Z^3 - 15Z^4\right) + \frac{Ag\beta h^3}{120\nu}\left(-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4\right) =$$
$$= \frac{S_1 h^2}{60\nu}\left[8 - 60Z^2 + 60Z^3 - 15Z^4 + a_s\left(-3 + 30Z^2 - 40Z^3 + 15Z^4\right)\right], \qquad (13)$$

где $a_s = \dfrac{Ag\beta h}{2S_1}$.

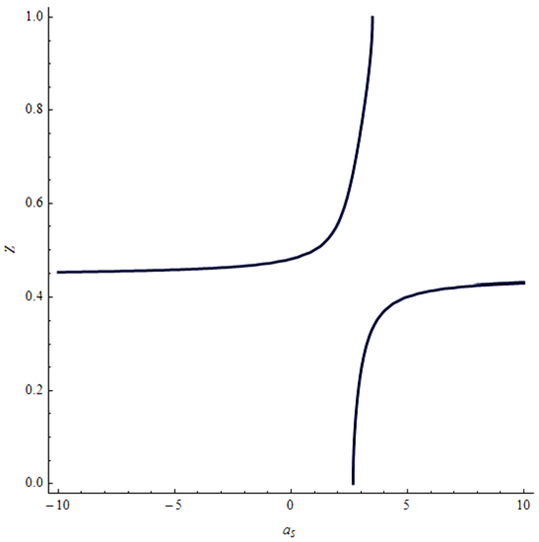

Рис. 5. Геометрическое место точек, удовлетворяющих условию U = 0

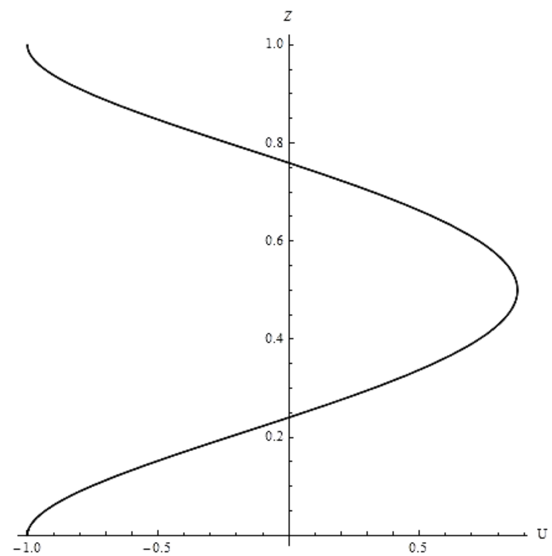

Рис.6. Профиль скорости U при $a_s = 3$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Н. В. Бурмашева[1], Е.А. Ларина[2], Е. Ю. Просвиряков[1]
nat_burm@mail.ru, larinakaterina@hotmail.com, evgen_pros@mail.ru