Институт машиноведения УрО РАН

Сектор нелинейной вихревой гидродинамики

Россия, Екатеринбург

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСЛОВИИ НАГРЕВА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ

Привалова В.В. [a)], Просвиряков Е.Ю. [b)]

[a)]valentprival@gmail.com

[b)]evgen_pros@mail.ru

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений, включающая в себя уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска, уравнение теплопроводности и уравнение несжимаемости описывает конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+g\beta T, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0.$$

Здесь V_x, V_y и V_z – скорости; $P=P(x,y,z)$ – отклонение давления от гидростатического, отнесённое к постоянной средней плотности жидкости ρ; T – отклонение от средней температуры; ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно; g – ускорение свободного падения; β – температурный коэффициент объёмного расширения жидкости.

Вид решения для слоистого течения:

$$V_x=U(z),\ V_y=V(z),\ V_z=0,$$

$$P=P_0(z)+xP_1(z)+yP_2(z),\ T=T_0(z)+xT_1(z)+yT_2(z). \qquad (2)$$

Система уравнений (1) при таком виде решений (2) принимает вид:

$$T_1'' = 0, \quad P_1' = g\beta T_1, \quad T_2'' = 0, \quad P_2' = g\beta T_2, \quad \nu U'' = P_1,$$

$$\nu V'' = P_2, \quad \chi T_0'' = UT_1 + VT_2, \quad P_0' = g\beta T_0. \qquad (3)$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В бесконечном слое жидкости на нижней твёрдой границе задан нагрев и условие проскальзывания Навье:

$$T_0(0) = 0, \; T_1(0) = A, \; T_2(0) = B, \qquad \alpha \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = U(0), \; \alpha \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = V(0).$$

Здесь α – длина проскальзывания. На верхней (свободной) поверхности задано значение функции давления, нулевая температура и нулевые касательные напряжения:

$$T_0(h) = T_1(h) = T_2(h) = 0, \quad P_0(h) = S_0, \quad P_1(h) = S_1, \quad P_2(h) = S_2,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=h} = 0.$$

Решение системы уравнений (3), удовлетворяющей граничным условиям имеет вид:

$$U = \frac{S_1}{2\nu}\left[z^2 - 2h(z+\alpha)\right] + \frac{Ag\beta}{24h\nu}\left[-6h^2z^2 + 4hz^3 - z^4 + 4h^3(z+\alpha)\right],$$

$$V = \frac{S_2}{2\nu}\left[z^2 - 2h(z+\alpha)\right] + \frac{Bg\beta}{24h\nu}\left[-6h^2z^2 + 4hz^3 - z^4 + 4h^3(z+\alpha)\right],$$

$$T_0 = \frac{(AS_1 + BS_2)}{120h\nu\chi}\left(2h^2 - 3hz + z^2\right)\left(4h^2 + 6hz - 3z^2 + 20h\alpha\right)z +$$

$$+\frac{\left(A^2+B^2\right)g\beta}{1008h^2\nu\chi}\left(2h^2-3hz+z^2\right)\left[-4h^4+7h^2z^2-4hz^3+z^4-2h^3\left(3z+14\alpha\right)\right]z,$$

$$T_1=A\left(1-\frac{z}{h}\right),\qquad T_2=B\left(1-\frac{z}{h}\right),\qquad P_1=S_1-\frac{Ag\beta}{2h}\left(h-z\right)^2,\qquad P_2=S_2-\frac{Bg\beta}{2h}\left(h-z\right)^2,$$

$$P_0=S_0-\frac{g\beta\left(AS_1+BS_2\right)}{240h\nu\chi}\left(h-z\right)^2\left[3h^4+z^4-2hz^2\left(2z+5\alpha\right)+2h^3\left(3z+5\alpha\right)+h^2z\left(z+20\alpha\right)\right]+$$

$$+\frac{g^2\beta^2\left(A^2+B^2\right)}{8064h^2\nu\chi}\left(h-z\right)^2\left[11h^6+15h^2z^4-6hz^5+z^6-4h^3z^2\left(5z+14\alpha\right)+h^5\left(22z+56\alpha\right)+h^4z\left(z+112\alpha\right)\right].$$

Анализ полученного решения показал, что компоненты скорости U и V могут иметь на интервале $(0;h)$ не более одной застойной точки с учётом положительной длины скольжения α.

Анализ вектора завихренности $\Omega=\left(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z\right)$ и касательных напряжений τ_{yz}, τ_{xz}, определяемых следующим образом:

$$\Omega_x=-\frac{\partial V_y}{\partial z}=-\tau_{yz}=\frac{S_2\left(h-z\right)}{\nu}-\frac{Bg\beta\left(h-z\right)^3}{6h\nu},\qquad \Omega_y=\frac{\partial V_x}{\partial z}=\tau_{xz}=\frac{S_1\left(h-z\right)}{\nu}-\frac{Ag\beta\left(h-z\right)^3}{6h\nu},$$

$$\Omega_z=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y},$$

показал, что компоненты Ω_x и Ω_y в слое жидкости $z\in\left[0;h\right]$ могут менять свой знак, а соответствующие им касательные напряжения могут меняться с растягивающих на сжимающие и наоборот (рис. 3).

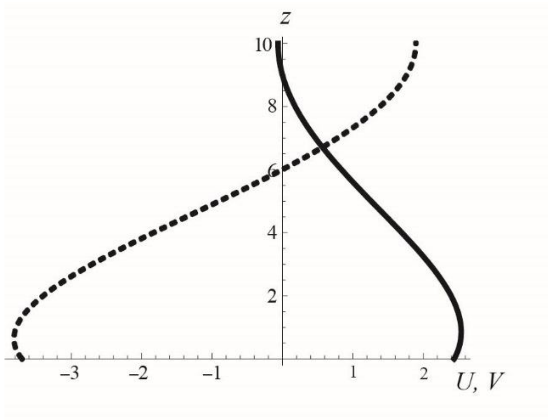

FIGURE 1. Профили компонент скорости U (сплошная линия) и V (пунктирная линия)

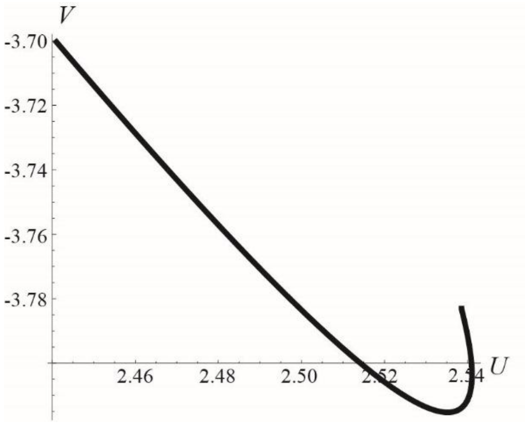

FIGURE 2. Годограф вектора скорости $\mathrm{V}=(U;V;0)$

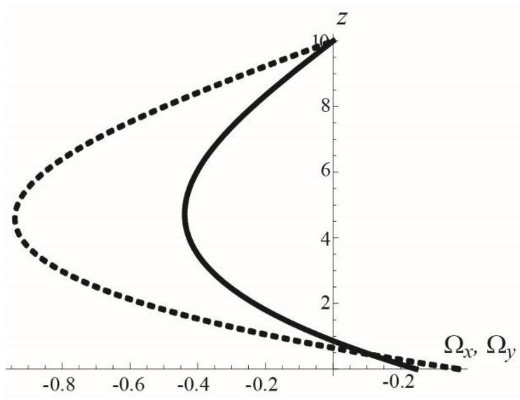

FIGURE 3. Профили компонент вектора завихренности Ω_y (сплошная линия) и Ω_x (пунктирная линия)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено точное решение для трёхмерной задачи конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости. Компоненты скорости определялись, как функции поперечной координаты. Температура и давление в слое жидкости задавались линейными функциями по двум продольным координатам. На нижней твёрдой поверхности слоя жидкости задавалось условие проскальзывания Навье и ненулевые градиенты температуры. На верхней свободной поверхности слоя жидкости рассматривались касательные напряжения и температура заданными нулю, а давление с постоянными, ненулевыми поперечными градиентами. Показано, каким образом способ определения контакта жидкости с твёрдой поверхностью влияют на возникновение в течении слоя жидкости застойных точек и областей противотечений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
[2] Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 736–751.
[3] Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 1–17.
[4] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2016. – № 2. – С. 25-31.
[5] Neto C., Evans D., Bonaccurso E. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 39. – P. 2859-2897. http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/68/12/R05
[6] Янков В. И., Боярченко В. И., Перевадчук В. П., Глот И. О., Шакиров Н. В. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. – М.-Ижевск: Издательство «РХД», 2008. – 264 с.
[7] Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides // M'em. Acad. Sci. Inst. de France. – 1822. – Vol. 2, No. 6. – P. 389-440.
[8] Navier C.L.M.H. Sur les lois du mouvement des fluids // M'em. Acad. R. Sci. inst. – 1827. – Fr. 6. – P. 389-440.
[9] Е.И. Борзенко, О.А. Дьякова, Г.Р. Шрагер Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник ТГУ, Механика. – 2014. – №2(28). – С. 35-44.

Благодарю за внимание!